УДК 532.5

Новое точное решение уравнений Навье – Стокса для описания неустановившихся течений вертикально завихренной жидкости

Е.Ю. ПРОСВИРЯКОВ,
д-р физ.-мат. наук
(Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург; УрФУ, Екатеринбург; КНИТУ-КАИ, Казань),
Л.С. ГОРУЛЕВА
(Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург; УрФУ, Екатеринбург),
О.А. ЛЕДЯНКИНА,
канд. техн. наук,
(КНИТУ-КАИ, Казань)
evgen_pros@mail.ru

Построено точное решение уравнений Навье – Стокса для описания неустановившихся сдвиговых изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости. Исходная система уравнений гидродинамики редуцируется к переопределенной нелинейной системе уравнений в частных производных. Для этой системы в классе Линя – Сидорова – Аристова построено нетривиальное точное решение с функциональным произволом. Для аналитического исследования свойств системы уравнений использовалось порождающее решение, которое позволяет тиражировать (размножать) точные решения для уравнений гидродинамики. Описание неустановившихся течений основано на модификации метода разделения переменных Фурье. Выведены уравнения для определения структуры гидродинамического поля. Развивается идея построения новых типов точных решения для поля скоростей с нелинейной зависимостью от двух пространственных координат. Анонсированные точные решения позволяют описывать течения вертикально завихренной жидкости без предварительной закрутки.

Точное решение, класс Линя – Сидорова – Аристова, уравнение Навье – Стокса, переопределенная система, неустановившиеся течения, вертикально завихренная жидкость

Исследование крупномасштабных течений вязких несжимаемых сред осуществляется интегрированием уравнений Навье – Стокса и их различных модификаций [1–7]. Движение несжимаемых жидкостей или газов индуцируется граничными или начально-краевыми условиями в различных силовых полях [1–5]. Известно, что интегрирование трехмерных уравнений Навье – Стокса для несжимаемых сред является чрезвычайно сложной и до конца не решенной проблемой [1–5]. Принципиальная сложность интегрирования уравнений Навье – Стокса заключается в отсутствии эволюционного уравнения для определения давления через компоненты вектора скорости и в наличии нелинейности, обусловленной конвективной производной для записи ускорения представительного объема несжимаемой сплошной среды [1–7].

Для устранения теоретического пробела по исследованию крупномасштабных потоков предложено приближение тонкого слоя [1, 6–11]. Это аппроксимация основана на введении геометрической изотропии для канала, по которому движется вязкая несжимаемая жидкость. Обычно выделяют два направления – горизонтальное (продольное) и вертикальное (поперечное) [1, 6, 12–15]. Традиционно один из масштабов длины на несколько порядков выше (как правило, горизонтальный), чем другой (как правило, вертикальный) [1, 6, 12–15]. Учет геометрической анизотропии в уравнениях движения Навье – Стокса для описания течений в тонком слое в научной литературе называется гидростатическим приближением [1, 6, 12–15].

Приближение тонкого слоя используется для описания гидродинамических процессов в Мировом океане, изучения атмосферы на планетах [1–15]. Уравнения, описывающие крупномасштабные течения в гидростатическом приближении, в океанологии и физике атмосферы называют примитивными уравнениями [1, 4, 5].

Основная идея гидростатического приближения заключается в том, что поле скоростей $\boldsymbol{V}$ описывается вектором $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,x,y,z),V_y(t,x,y,z),0\right)$. Таким образом, гидростатическое приближение отфильтровывает существенно трехмерные течения, а вводятся в рассмотрение неоднородные сдвиговые потоки [12–15]. Отметим, что в настоящее время построены математические модели для вектора $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,x,y,z),V_y(t,x,y,z),w\right)$ с постоянной вертикальной (поперечной) скоростью w [16, 17]. Использование математического аппарата для примитивных уравнений океана и атмосферы важно для конструирования авиационной техники [14, 18–22].

Исследование неоднородных сдвиговых течений $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,x,y,z),V_y(t,x,y,z),0\right)$ осложняется тем, что система уравнений движения является переопределенной. Простейшим точным решением для описания однородных сдвиговых течений является поле скоростей вида $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,z),V_y(t,z),0\right)$. Данное точное решение автоматически удовлетворяет уравнению несжимаемости, т. е. это уравнение является «лишним». Выражение для вектора скорости описывает суперпозицию однонаправленных потоков Куэтта – Пуазейля – Нуссельта [2–5].

К неоднородным сдвиговым движениям $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,z)-\Omega y,V_y(t,z)+\Omega x,0\right)$ относится твердотельное вращение жидкости с угловой скоростью Ω, которое описывается в инерциальной системе отсчета [1–6]. Точное решение Экмана во вращающихся системах координат описывается однородным профилем Куэтта – Пуазейля – Нуссельта. Точное решение Экмана, как и анзацы типа Куэтта – Пуазейля – Нуссельта, определяется из простейших систем уравнений типа теплопроводности. Обобщением сдвиговых потоков Экмана – Куэтта – Пуазейля – Нуссельта является точное решение $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,z)+u(t,z)y,V_y(t,z),0\right)$, приведенное в статьях [12–20]. Оно принадлежит полиномиальному классу Линя – Сидорова – Аристова [4, 5, 21, 23–27].

Точное решение $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,z)+u(t,z)y,V_y(t,z),0\right)$ изучалось для описания изотермических и конвективных $T=T_0(t,z)+T_1(t,z)y+T_2(t,z)y$ установившихся потоков вязких несжимаемых жидкостей [12–20]. Это точное решение описывает вертикально завихренные потоки жидкости без предварительной закрутки [12–20], а также противотечения жидкости с усилением скоростей относительно граничных возмущений. Благодаря использованию данного точного решения для описания колебаний жидкости в точной постановке установлена область применимости решения второй задачи Стокса для установившегося пространственного градиента [13, 15, 28, 29]. В этом случае точное решение для нестационарных уравнений гидродинамики может быть получено классическим методом разделения переменных Фурье [30, 31].

В данной статье предложено решение нелинейной начально-краевой задачи с нестационарным распределением пространственного градиента скорости. Показано, как можно использовать метод Фурье для описания колебательных движений вязкой несжимаемой жидкости. В этом случае учет нелинейной силы инерции приводит к увеличению гармоник для описания поля скоростей. Обсуждается возможность обобщения приведенного точного решения, и приведены методы для тиражирования анонсированного абзаца.

Изобарическое движение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое описывается векторным уравнением Навье – Стокса и скалярным уравнением неразрывности (несжимаемости) [2]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\left(\boldsymbol{V},\nabla\right)\boldsymbol{V}=\nu\Delta\boldsymbol{V};\qquad \left(\nabla,\boldsymbol{V}\right)=0. \tag{1}$$

В системе (1) введены следующие стандартные обозначения для уравнений гидродинамики: $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,x,y,z),V_y(t,x,y,z),V_z(t,x,y,z)\right)$ – вектор скорости жидкости; ν – кинематическая (молекулярная) вязкость. Отметим, что уравнение Навье – Стокса в системе (1) можно трактовать шире, чем описание потоков жидкости при постоянном давлении. Градиент давления, деленного на постоянную плотность жидкости, может балансировать потенциалом консервативных сил, что эквивалентно с формальной точки зрения записи определяющих соотношение в виде (1), хотя течение жидкости уже не является изобарическим.

Неоднородное сдвиговое течение $\boldsymbol{V}=\left(V_x(t,x,y,z),V_y(t,x,y,z),0\right)$ вязкой несжимаемой жидкости (размерности «два с половиной») описывается следующей нелинейной переопределенной системой уравнений в частных производных второго порядка [12–15]:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right); \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right);$$
$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

Точное решение для системы уравнений (2) будем искать в следующем полиномиальном виде [12–15]:

$$V_x=U(t,z)+\Omega(t,z)y;$$
$$V_y=V(t,z). \qquad (3)$$

Поле скоростей (3) принадлежит классу точных решений Линя – Сидорова – Аристова. Оно описывается линейными формами относительно части координат с функциональным произволом, вид которого будет определяться структурой системы уравнений (2).

Отметим, что структура точного решения (3) такая, что в системе (2) уравнение несжимаемости $\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$ автоматически удовлетворяется. Таким образом, в классе (3) для представления гидродинамического поля уравнение несжимаемости является «лишним» уравнением. Следовательно, система уравнений (2) становится разрешимой [12–15]. В статьях [12, 30–34] было построено преобразование поворота:

$$x\to x\cos\varphi-y\sin\varphi;$$
$$y\to x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$

позволяющего размножать (тиражировать) точное решение (3) до семейства вида [12–15, 23–27]:

$$V_x=A(t,z)+a_1(t,z)x+a_2(t,z)y;$$
$$V_y=B(t,z)+b_1(t,z)x+b_2(t,z)y;$$
$$a_1^2+a_2b_1=0.$$

Для определения неизвестных функций U, V, Ω подставим выражения (3) в систему (2), вычислив соответствующие частные производные по времени и пространственным переменным:

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial\Omega}{\partial t}y;\ \frac{\partial V_y}{\partial t}=\frac{\partial V}{\partial t};$$
$$\frac{\partial V_x}{\partial y}=\Omega;\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial\Omega^2}{\partial z^2}y;\ \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$
$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{\partial V_y}{\partial y}=0.$$

Отметим, что трехмерный оператор конвективной производной $(\boldsymbol{V},\nabla)$ и трехмерный оператор Лапласа $\Delta\boldsymbol{V}$ записываются следующим образом:

$$(\boldsymbol{V},\nabla)=\left(V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y},V_x\frac{\partial}{\partial x}+V_y\frac{\partial}{\partial y},0\right);$$
$$(\boldsymbol{V},\nabla)\boldsymbol{V}=\left(V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y},V_x\frac{\partial V_y}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_y}{\partial y},0\right)=(\Omega V,0,0);$$
$$\Delta\boldsymbol{V}=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial\Omega^2}{\partial z^2}y,\frac{\partial^2 V}{\partial z^2},0\right).$$

Система уравнений (2) в силу точного решения (3) и вычисленных частных производных первого и второго порядка примет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial \Omega}{\partial t}y+\Omega V=\nu\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\partial \Omega^2}{\partial z^2}y\right);$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим следующие соотношения для определения неизвестных функций, формирующих гидродинамическое поле (3):

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}+\Omega V=\nu\frac{\partial^2 U}{\partial z^2};\\ \frac{\partial \Omega}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2};\\ \frac{\partial V}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.\end{gathered}\tag{4}$$

Система уравнений в частных производных (4) состоит их двух однородных уравнений типа теплопроводности второго порядка и одного простейшего параболического уравнения, наследующего нелинейные свойства вязкой несжимаемой жидкости.

Для системы уравнений в частных производных (4) построим точные решения в следующей форме:

$$\begin{gathered}\Omega(z,t)=\Omega_1\cos(\omega t)+\Omega_2\sin(\omega t);\\ V(z,t)=V_1\cos(\omega t)+V_2\sin(\omega t);\\ U(z,t)=U_0(z)+U_1(z)\cos(\omega t)+U_2(z)\sin(\omega t)+\\ +U_3(z)\cos(2\omega t)+U_4(z)\sin(2\omega t).\end{gathered}\tag{5}$$

Отметим, что в формулах (5) выражения для функций Ω и V получены обобщенным применением метода разделения переменных Фурье. Представление для функций двух переменных – Ω и V – может быть обобщено в виде конечной или бесконечной суммы по кратным гармоникам синусов и косинусов [30, 31].

Выражение точного решения для определения скорости U было получено после предварительного изучения структуры слагаемого ΩV конвективной производной в первом уравнении системы (3):

$$\begin{gathered}\Omega V=\left(\Omega_1\cos(\omega t)+\Omega_2\sin(\omega t)\right)\left(V_1\cos(\omega t)+V_2\sin(\omega t)\right)=\\ =\Omega_1V_1\cos^2(\omega t)+\Omega_2V_2\sin^2(\omega t)+\left(\Omega_1V_2+\Omega_2V_1\right)\sin(\omega t)\cos(\omega t)=\\ =\Omega_1V_1\left(\frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\right)+\Omega_2V_2\left(\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\right)+\left(\Omega_1V_2+\Omega_2V_1\right)\frac{\sin(2\omega t)}{2}.\end{gathered}$$

Вычислим далее частные производные, входящие в систему (4), в силу точного решения (3):

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}=-U_1\omega\sin(\omega t)+U_2\omega\cos(\omega t)-2U_3\omega\sin 2(\omega t)+2U_4\omega\cos(2\omega t);\\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\cos(\omega t)+\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}\sin(\omega t)+\frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}\cos(2\omega t)+\frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}\sin(2\omega t);\\ \frac{\partial \Omega}{\partial t}=\Omega_2\omega\cos(\omega t)-\Omega_1\omega\sin(\omega t);\\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z^2}\cos(\omega t)+\frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z^2}\sin(\omega t);\end{gathered}\tag{6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V_2 \omega \cos(\omega t) - V_1 \omega \sin(\omega t);$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} \cos(\omega t) + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2} \sin(\omega t). \tag{6}$$

Подставим точное решение для поля скорости (4) и выражения для частных производных (6) в систему (3), получим уравнения

$$U_2 \omega \cos(\omega t) + 2U_4 \omega \cos(2\omega t) - U_1 \omega \sin(\omega t) - 2U_3 \omega \sin(2\omega t) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Omega_1 V_1 - \Omega_2 V_2\right)\cos(2\omega t) + \frac{1}{2}\left(\Omega_1 V_2 + \Omega_2 V_1\right)\sin(2\omega t) + \frac{1}{2}\left(\Omega_1 V_1 - \Omega_2 V_2\right) =$$
$$= \nu\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2}\cos(\omega t) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}\sin(\omega t) + \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2}\cos(2\omega t) + \frac{\partial^2 U_4}{\partial z^2}\sin(2\omega t)\right);$$
$$\Omega_2 \omega \cos(\omega t) - \Omega_1 \omega \sin(\omega t) = \nu\left(\frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z^2}\cos(\omega t) + \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial z^2}\sin(\omega t)\right);$$
$$V_2 \omega \cos(\omega t) - V_1 \omega \sin(\omega t) = \nu\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\cos(\omega t) + \frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}\sin(\omega t)\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, формирующих конечный тригонометрический базис $\left\{1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \cos(2\omega t)\right\}$, получим систему для определения неизвестных функций Ω_1, Ω_2, V_1, V_2, U_0, U_1, U_2, U_3, U_4:

$$\nu \frac{d^2 U_0}{dz^2} = \frac{1}{2}\left(\Omega_1 V_1 - \Omega_2 V_2\right);$$
$$U_2 \omega = \nu \frac{d^2 U_1}{dz^2}, \; U_1 \omega = -\nu \frac{d^2 U_2}{dz^2};$$
$$4U_4 \omega + \left(\Omega_1 V_1 - \Omega_2 V_2\right) = 2\nu \frac{d^2 U_3}{dz^2};$$
$$-4U_3 \omega + \left(\Omega_1 V_2 + \Omega_2 V_1\right) = 2\nu \frac{d^2 U_4}{dz^2}; \tag{7}$$
$$\Omega_2 \omega = \nu \frac{d^2 \Omega_1}{dz^2}, \; \Omega_1 \omega = -\nu \frac{d^2 \Omega_2}{dz^2}; \tag{8}$$
$$V_2 \omega = \nu \frac{d^2 V_1}{dz^2}, \; V_1 \omega = -\nu \frac{d^2 V_2}{dz^2}. \tag{9}$$

Интегрирование системы уравнений (7) – (9) начнем с построения точного решения уравнений (9) для определения функций V_1 и V_2, являющихся амплитудами. Уравнения (9) в гидродинамике известны как система уравнений Экмана, используемая для описания крупномасштабных течений в бесконечно протяженном вращающемся горизонтальном слое жидкости конечной или бесконечной глубины. Система (9) сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{d^4 V_1}{dz^4} + k^4 V_1 = 0, \tag{10}$$

где $k^4 = \left(\frac{\omega}{\nu}\right)^2$ – дисперсионное соотношение. Для вывода уравнения (10) первое уравнение (9) дважды дифференцируем, а затем выражение для второй производной функции V_2 подставляем во второе уравнение (9).

Решая однородное линейное дифференциальное уравнение, получим следующее:

$$V_1 = C_1 \exp(kz)\cos(kz) + C_2 \exp(kz)\sin(kz) + C_3 \exp(-kz)\cos(kz) + C_4 \exp(-kz)\sin(kz). \tag{11}$$

Вычисляем первую производную функции V_1:

$$\frac{dV_1}{dz} = \left(C_1 + C_2\right)k \exp(kz)\cos(kz) + \left(C_2 - C_1\right)k \exp(kz)\sin(kz) +$$
$$+\left(C_4 - C_3\right)k \exp(-kz)\cos(kz) - \left(C_3 + C_4\right)k \exp(-kz)\sin(kz)$$

и вторую производную

$$\frac{d^2V_1}{dz^2} = 2C_2k^2 \exp(kz)\cos(kz) - 2C_1k^2 \exp(kz)\sin(kz) +$$
$$+2C_3k^2 \exp(-kz)\sin(kz) - 2C_4k^2 \exp(-kz)\cos(kz).$$

Имеем следующее точное решение:

$$V_2 = 2C_2 \exp(kz)\cos(kz) - 2C_1 \exp(kz)\sin(kz) + 2C_3 \exp(-kz)\sin(kz) - 2C_4 \exp(-kz)\cos(kz). \tag{12}$$

По аналогии получаем выражения для амплитуд пространственного градиента скорости, которые являются точными решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений (8):

$$\begin{gathered}\Omega_1 = C_5 \exp(kz)\cos(kz) + C_6 \exp(kz)\sin(kz) + C_7 \exp(-kz)\cos(kz) + C_8 \exp(-kz)\sin(kz);\\ \Omega_2 = 2C_6 \exp(kz)\cos(kz) - 2C_5 \exp(kz)\sin(kz) + 2C_7 \exp(-kz)\sin(kz) - 2C_8 \exp(-kz)\cos kz.\end{gathered} \tag{13}$$

Представление части компонент скорости U, являющихся решениями второй подсистемы (7), имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}U_1 = C_9 \exp(kz)\cos(kz) + C_{10} \exp(kz)\sin(kz) + C_{11} \exp(-kz)\cos(kz) + C_{12} \exp(-kz)\sin(kz);\\ U_2 = 2C_{10} \exp(kz)\cos(kz) - 2C_9 \exp(kz)\sin(kz) + 2C_{11} \exp(-kz)\sin(kz) - 2C_{12} \exp(-kz)\cos(kz).\end{gathered} \tag{14}$$

Очевидно, что выражения для остальных функций могут быть получены стандартным интегрированием неоднородных дифференциальных уравнений (7) с подстановкой формул (11) – (14), точные решения которых здесь не приводятся из-за их громоздкости.

Полученные точные решения (11) – (14) описывают пространственную спиралевидную структуру Экмана, которая описывает сложную нелинейную стратификацию. В этом случае в жидкости возможны противотечения и усиление скоростей относительно граничных возмущений, для исследований которых необходимо решить краевые и начально-краевые задачи. Полученное точное решение позволяет исследовать новые способы передачи импульса в жидкости.

Отметим, что точное решение (3), как было показано в статьях [32–36], может быть обобщено до следующего представления поля скоростей:

$$\begin{gathered}V_y = U(t,z) + \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t,z)y^n}{n!};\\ V_y = V(t,z).\end{gathered} \tag{15}$$

Благодаря применению абзаца (15) возможно лучше понять структуру уравнений Навье – Стокса с подходом статистической гидродинамики для описания турбулентных потоков методами осреднения, поскольку для определения неизвестных функций (15) в работах [32, 33, 37] приведена цепочка уравнений, вид которых подобен уравнениям Рейнольдса, но не для пульсаций поля скорости.

Таким образом, в данной работе предложено новое точное решение уравнений Навье – Стокса для исследования неустановившихся изобарических неоднородных сдвиговых течений размерности «два с половиной». Двумерное поле скоростей, линейно зависящее от двух пространственных координат, описывает вертикально завихренную жидкость без предварительной закрутки. При нахождении точного решения учитывалась сила инерции в уравнениях Навье – Стокса, что существенно затрудняло нахождение нетривиального точного решения переопределенной системы уравнений в частных производных. Построение точного решения осуществлялось методом мультипликативного и аддитивного разделения переменных. Для части уравнений использовался классический метод Фурье. Для одного из уравнений при определении поля скорости применялась модификация метода Фурье, обусловленная нелинейностью изучаемого процесса. Показано, что при учете пространственного ускорения (вертикальной закрутки) в жидкости возникают застойные точки, которые становятся причиной формирования противотечений, и реализуется такой способ переноса импульса в несжимаемой среде, приводящий к усилению граничных периодических возмущений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, тема № 123030100016-5, FZSU-2023-0005.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аристов С.Н., Шварц К.Г.* Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: ПГНИУ, 2006. 155 с.
2. *Drazin P.G., Riley N.* The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.
3. *Ershkov S.V. et al.* Towards Understanding the Algorithms for Solving the Navier–Stokes Equations // Fluid Dynamics Research. 2021. Vol. 53. № 4. Article № 044501.
4. *Ershkov S. et al.* Exact Solutions of the Oberbeck–Boussinesq Equations for the Description of Shear Thermal Diffusion of Newtonian Fluid Flows // Symmetry. 2023. Vol. 15. № 9. Article № 1730.
5. *Ershkov S.V. et al.* Solving the Hydrodynamical System of Equations of Inhomogeneous Fluid Flows with Thermal Diffusion: A Review // Symmetry. 2023. Vol. 15. Iss. 10. Article № 1825.
6. *Фрик П.Г.* Становление исследований турбулентности в Перми (памяти Валерия Дмитриевича Зимина) // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. 2023. № 2. С. 81–94.
7. *Челпанов М.А. и др.* Обзор и сравнение особенностей МГД-волн на Солнце и в магнитосфере Земли // Солнечно-земная физика. 2022. № 4. С. 3–28.
8. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Адвективные течения в плоском вращающемся слое проводящей жидкости // Магнитная гидродинамика. 1988. № 1. С. 13–20.
9. *Аристов С.Н., Фрик П.Г.* Нелинейные эффекты взаимодействия конвективных вихрей и магнитного поля в тонком слое проводящей жидкости // Магнитная гидродинамика. 1990. № 1. С. 82–88.
10. *Аристов С.Н., Пичугин А.М.* Монотонная устойчивость адвективного течения проводящей жидкости в слабом поперечном магнитном поле // Магнитная гидродинамика. 1989. № 3. С. 127–129.
11. *Шварц К.Г.* Устойчивость адвективного течения во вращающемся слое проводящей жидкости, помещенной в постоянное однородное магнитное поле // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 3. С. 12–20.
12. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. № 2. С. 177–182.
13. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Волны Стокса в завихренной жидкости // Нелинейная динамика. 2014. № 3. С. 309–318.
14. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Авиационная техника. 2015. № 4. С. 50–54.
15. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2016. № 2. С. 25–31.
16. *Привалова В.В., Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений уравнений Обербека – Буссинеска, описывающих несжимаемую жидкость // Теоретические основы химической технологии. 2022. № 3. С. 337–344.
17. *Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A.* Nonlinear Gradient Flow of a Vertical Vortex Fluid in a Thin Layer // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. № 3. P. 271–283.
18. *Просвиряков Е.Ю. и др.* Точные решения уравнений Навье – Стокса в приближении Буссинеска для описания течений бинарных жидкостей // Изв. вузов. Авиационная техника. 2023. № 3. С. 77–84.
19. *Просвиряков Е.Ю., Ледянкина О.А., Горулева Л.С.* Точные решения уравнений Навье – Стокса для описания течений многокомпонентных жидкостей с учетом внутреннего тепловыделения // Изв. вузов. Авиационная техника. 2024. № 1. С. 55–63.
20. *Ледянкина О.А., Просвиряков Е.Ю., Романова Е.В.* Точные решения уравнений Навье Стокса для описания вращающейся жидкости // Изв. вузов. Авиационная техника. 2022. № 2. С. 184–188.
21. *Князев Д.В., Ражиков В.Н., Щеглов К.Н.* Анализ течения смазочной жидкости в электродвигателе герметичного насоса // Изв. вузов. Авиационная техника. 2018. № 3. С. 4–8.

22. *Гараев К.Г.* О неклассическом подходе к построению автомодельных решений в теории ламинарного пограничного слоя // Изв. вузов. Авиационная техника. 2022. № 1. С. 184–188.
23. *Lin C.C.* Note on a Class of Exact Solutions in Magnetohydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1957. Vol. 1. P. 391–395.
24. *Сидоров А.Ф.* О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикладная механика и техническая физика. 1989. № 2. С. 34–40.
25. *Аристов С.Н.* Вихревые течения в тонких слоях жидкости: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. Владивосток, 1990. 32 с.
26. *Аристов С.Н., Князев Д.Е., Полянин А.Д.* Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. № 5. С. 547–566.
27. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. 2016. № 3. С. 294–301.
28. *Stokes G.G.* On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1851. Vol. 9. P. 8–106.
29. *Букреев В.И.* Экспериментальное изучение диапазона применимости решения второй задачи Стокса // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 4. С. 26–31.
30. *Полянин А.Д., Журов А.И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. М.: ИПМех РАН, 2020. 384 с.
31. *Polyanin A.D., Zhurov A.I.* Separation of Variables and Exact Solutions to Nonlinear PDEs. CRC Press, 2022. 401 p.
32. *Зубарев Н.М., Просвиряков Е.Ю.* О точных решениях для слоистых трехмерных нестационарных изобарических течений вязкой несжимаемой жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 2019. № 6. С. 65–71.
33. *Baranovskii E.S., Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu.* Exact Solutions to the Navier–Stokes Equations with Couple Stresses // Symmetry. 2021. Vol. 13. Iss. 8. Article № 1355.
34. *Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений уравнений Навье – Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // Теоретические основы химической технологии. 2019. № 1. С. 112–120.
35. *Горулева Л.С., Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений уравнений Навье – Стокса с учетом внутреннего тепловыделения // Химическая физика и мезоскопия. 2022. № 1. С. 82–92.
36. *Burmasheva N. et al.* Exact Solutions of Navier–Stokes Equations for Quasi–Two–Dimensional Flows with Rayleigh Friction // Fluids. 2023. Vol. 8. № 4. Article № 123.
37. *Горулева Л.С., Просвиряков Е.Ю.* Новый класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики для описания конвективных течений бинарных жидкостей // Химическая физика и мезоскопия. 2023. № 4. С. 447–462.

Поступила в редакцию 1.04.25
После доработки 7.04.25
Принята к публикации 7.04.25

A New Exact Solution of the Navier–Stokes Equations for Describing the Unsteady Flows of Vertically Swirled Fluid

E.YU. PROSVIRYAKOV[1,2,3], L.S. GORULEVA[1,2], AND O.A. LEDYANKINA[3]

[1] Institute of Engineering Science, Ural Branch of the RAS, Ekaterinburg
[2] Ural Federal University, Ekaterinburg
[3] Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan

An exact solution of the Navier–Stokes equations is constructed to describe unsteady shear isobaric flows of a viscous incompressible fluid. The original system of hydrodynamic equations is reduced to an overdetermined nonlinear system of partial differential equations. For this system, a nontrivial exact solution with functional arbitrariness is constructed in the Lin–Sidorov–Aristov class. For an analytical study of the properties of the system of equations, a generating solution was used, which allows replicating (multiplying) exact solutions for the equations of hydrodynamics. The description of unsteady flows is based on a modification of the Fourier variable separation method. Equations are derived to determine the structure of the hydrodynamic field. The development of the idea of constructing new types of exact solutions for a velocity field with a nonlinear dependence on two spatial coordinates is presented. The exact solutions announced in the paper allow describing flows of a vertically swirled fluid without preliminary swirling.

Exact solution, Lin–Sidorov–Aristov class, Navier–Stokes equation, overdetermined system, unsteady flows, vertically swirled fluid